

Docente: Vincenzo Pappalardo
Materia: Matematica

Disequazioni 2° grado

* Algebra



Un' equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

può essere vista come l' equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

che traduce il problema di trovare le intersezioni tra una parabola e l' asse delle x .

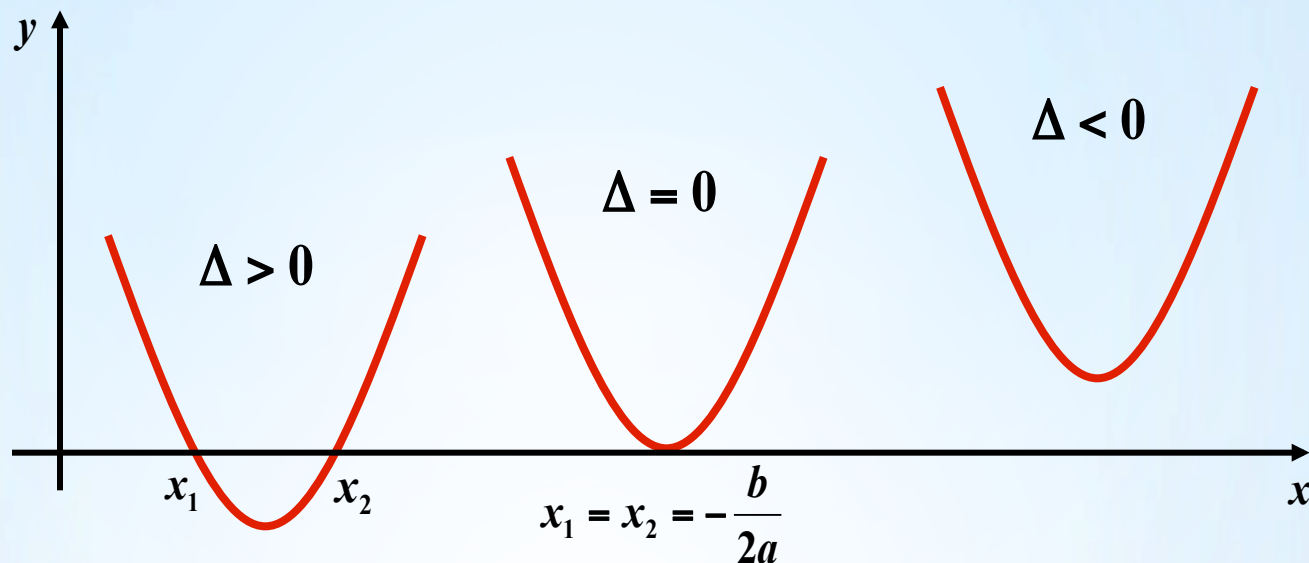
Per risolvere l' equazione si applicano le note formule

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse degli eventuali punti di intersezione parabola-asse.

Graficamente



Se $\Delta > 0$ la parabola incontra l'asse in due punti

Se $\Delta = 0$ la parabola incontra l'asse in un punto

Se $\Delta < 0$ la parabola non incontra l'asse.

Nell'insieme dei numeri reali la risoluzione della disequazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

può essere interpretata graficamente: la disequazione data è equivalente al sistema misto

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y > 0 \end{cases}$$

Si tratta di determinare nel piano cartesiano l'intersezione tra una parabola e il semipiano formato dall'insieme dei punti che hanno ordinata positiva.

La risoluzione, invece, della disequazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

può essere interpretata graficamente con il sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y < 0 \end{cases}$$

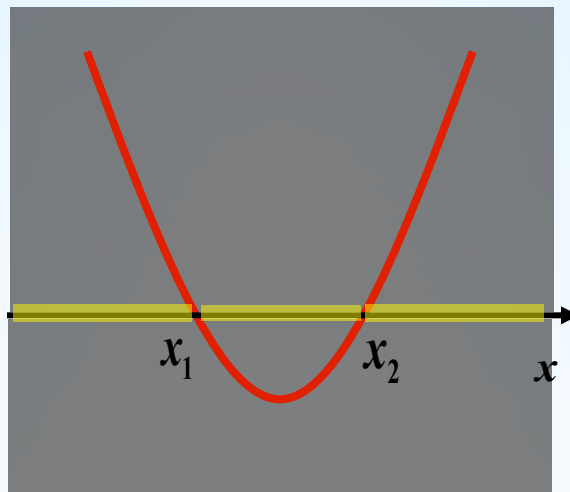
Si tratta di determinare nel piano cartesiano l'intersezione tra una parabola e il semipiano dei punti che hanno ordinata negativa.

$$a > 0$$

Se $a < 0$ basta moltiplicare entrambi i membri della disequazione per (-1) , cambiandone il verso e i segni

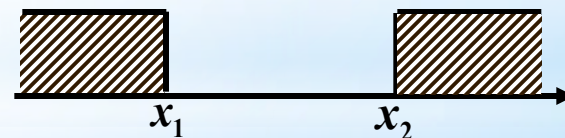
$$\Delta > 0$$

la parabola è
positiva
per valori esterni
alle soluzioni



la parabola è
negativa
per valori interni
alle soluzioni

$$ax^2 + bx + c > 0 \iff x < x_1 \vee x > x_2$$



$$ax^2 + bx + c < 0 \iff x_1 < x < x_2$$

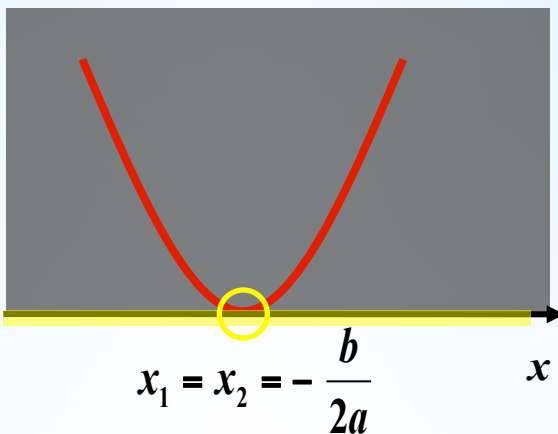


$$a > 0$$

Se $a < 0$ basta moltiplicare entrambi i membri della disequazione per (-1) , cambiandone il verso e i segni

$$\Delta = 0$$

La parabola giace tutta al di sopra dell'asse delle x ,
tranne il vertice che si trova sull'asse



la parabola non è mai negativa

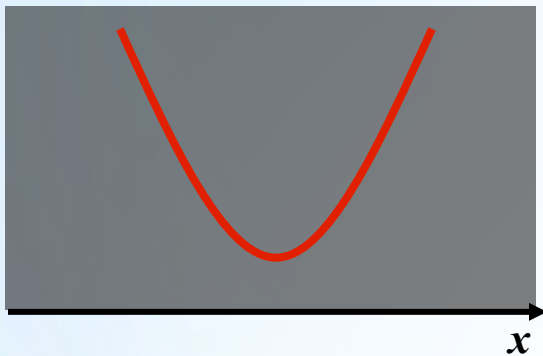
$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \longleftrightarrow \quad x \neq -\frac{b}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{mai}$$

$$a > 0$$

Se $a < 0$ basta moltiplicare entrambi i membri della disequazione per (-1) , cambiandone il verso e i segni

$$\Delta < 0$$



La parabola giace
tutta al di sopra
dell'asse delle x , non
incontra mai l'asse e
non è mai negativa

$$ax^2 + bx + c > 0$$



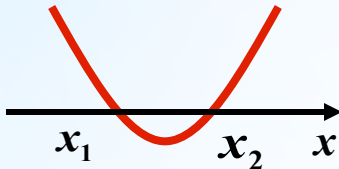
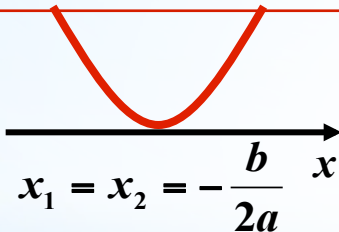
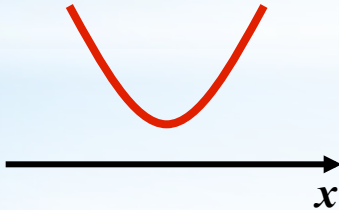
sempre

$$ax^2 + bx + c < 0$$



mai

* La risoluzione delle disequazioni di secondo grado si può riassumere nella tabella

$a > 0$	parabola	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$		$x < x_1 \vee x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$		$\forall x \in \mathfrak{R} - \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	$\nexists x \in \mathfrak{R}$
$\Delta < 0$		$\forall x \in \mathfrak{R}$	$\nexists x \in \mathfrak{R}$

Se nella disequazione da risolvere compare il segno $\geq$ o $\leq$ si dovranno considerare come soluzioni, oltre ai punti della parabola che giacciono internamente a uno dei due semipiani generati dall'asse x , anche gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x .

$a > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$	$\forall x \in \mathfrak{R}$	$x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathfrak{R}$	$\nexists x \in \mathfrak{R}$

ESERCIZI

* Risolvere la seguente disequazione: $-10x - 8x^2 - 3 > 0$

Poiché non è ordinata, la riscriviamo:

$$-8x^2 - 10x - 3 > 0.$$

Poiché il coefficiente di x^2 è $-8 < 0$, moltiplichiamo i due membri per -1 e *cambiamo il verso della disequazione*:

$$8x^2 + 10x + 3 < 0.$$

RisolviAMO l'equazione associata:

$$8x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (+5)^2 - 8 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{8} = \begin{cases} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Applichiamo la regola: se l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

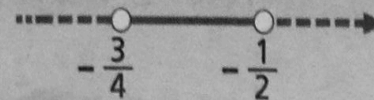
(con $a > 0$) ha $\Delta > 0$, la disequazione

$$ax^2 + bx + c < 0$$

è verificata dai valori interni all'intervallo delle radici dell'equazione.

L'intervallo delle soluzioni di $8x^2 + 10x + 3 < 0$ è:

$$-\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{2}, \text{ ossia } \left] -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2} \right[.$$



Disequazioni intere

* Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$

b) $3x^2 - 2x + 1 < 0$

a) Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata:

$$\frac{\Delta}{4} = 6^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$$

L'equazione ha dunque una radice reale doppia:

$$x = \frac{3}{2}.$$

Possiamo riscrivere la disequazione così:

$$4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0.$$

La disequazione è verificata per ogni valore di x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad] - \infty; + \infty[.$$

Avremmo potuto dedurre la soluzione senza fare calcoli, riconoscendo che $4x^2 - 12x + 9$ è il quadrato del binomio $2x - 3$ e ricordando che un quadrato non può essere negativo.

b) Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata:

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 3 = -2 < 0.$$

Poiché il coefficiente di x^2 , $a = 3$, è positivo e $\Delta < 0$, la disequazione non è mai verificata.

Scriviamo pertanto:

$$\nexists x \in \mathbb{R}.$$

Disequazioni intere

* Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:

a) $x^2 + 3x + 2 > 0$

b) $x^2 - 2x + 1 > 0$

c) $x^2 + 1 < 0$

a) Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = x^2 + 3x + 2.$$

La parabola ha vertice in $V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) e interseca l'asse y nel punto $P(0; 2)$.

Le ascisse dei punti di intersezione con l'asse x sono le soluzioni dell'equazione:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

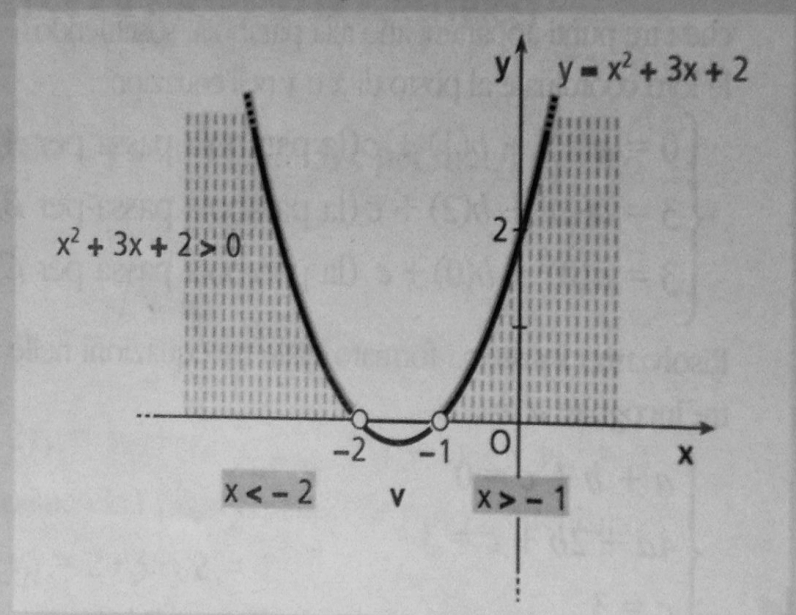
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

ossia $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

I punti della parabola che hanno ordinata positiva

sono quelli disposti «sopra l'asse x », sono cioè quelli che hanno ascissa minore di -2 o maggiore di -1 .

Le soluzioni della disequazione sono $x < -2 \vee x > -1$.



Disequazioni intere

b) Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = x^2 - 2x + 1.$$

La parabola ha vertice in $V(1; 0)$, la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) e interseca l'asse y nel punto $P(0; 1)$.

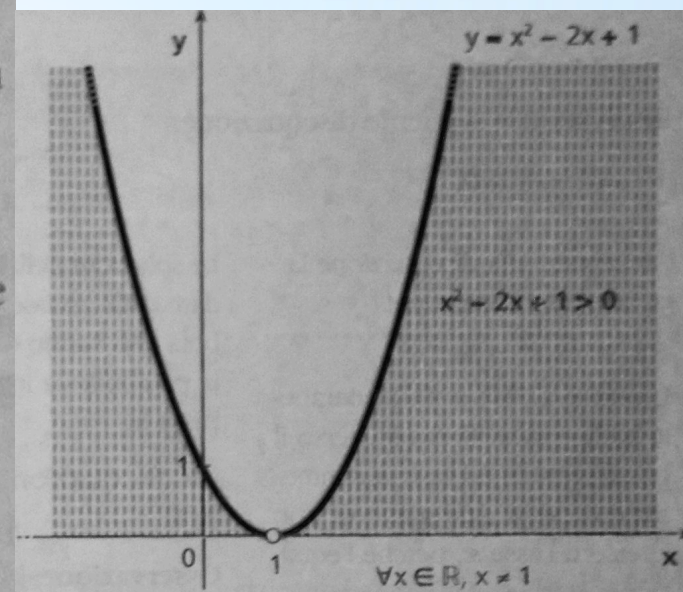
La parabola è quindi tangente all'asse x nel vertice e si trova interamente «al di sopra» di esso: per ogni valore di x diverso da 1 le ordinate dei punti della parabola sono positive. Per convincerci di questo, eseguiamo i calcoli:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1.$$

La disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.



Disequazioni intere

La disequazione è soddisfatta per $x \in \mathbb{R}$.

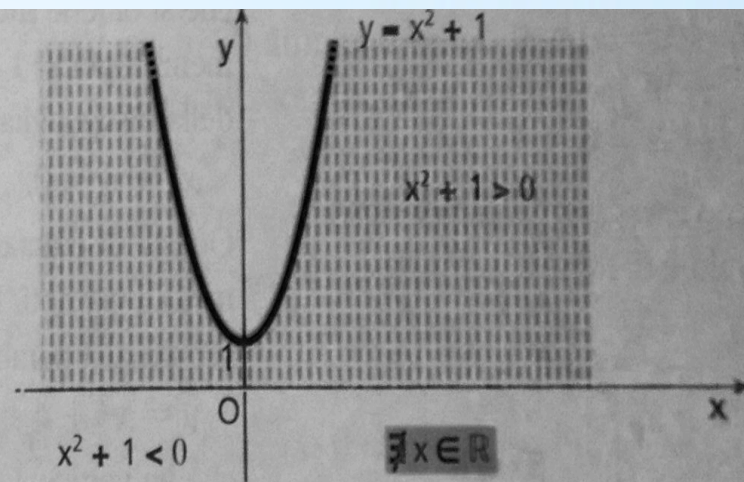
c) Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = x^2 + 1.$$

Tale parabola ha vertice in $V(0; 1)$, che appartiene all'asse y : l'asse della parabola coincide con l'asse y . Inoltre, essa ha la concavità rivolta verso l'alto e, poiché l'ordinata del vertice è 1, non interseca l'asse x in alcun punto.

La parabola si trova interamente «al di sopra» dell'asse x , quindi tutti i suoi punti hanno ordinata positiva: non c'è alcun punto della parabola che abbia ordinata negativa, pertanto la disequazione non è mai verificata per alcun valore reale di x .

Non esistono soluzioni reali della disequazione.



Disequazioni intere

*

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{9x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6} < 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

- $9x^2 + 2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Equazione associata:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

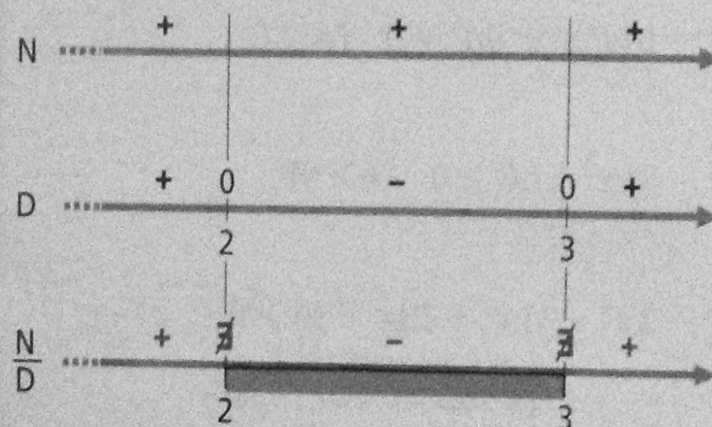
$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

La disequazione è verificata per valori esterni a 2 e 3:

$$x < 2 \vee x > 3.$$

Compiliamo il quadro dei segni:



La disequazione fratta è soddisfatta per:

$$2 < x < 3,$$

ossia nell'intervallo:

$$]2; 3[.$$

Disequazioni fratte

*

Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{5x - x^2 - 4}{x^2 + 2x} > 0$$

$$N > 0 \Rightarrow 5x - x^2 - 4 > 0 \Rightarrow \{1 < x < 4\}$$

$$D > 0 \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow \{x < -2\} \cup \{x > 0\}$$

--	--	--	++	--
++	--	++	++	++

-2	0	1	4
⊖	⊕	⊖	⊕

$$\Rightarrow S = \{-2 < x < 0\} \cup \{1 < x < 4\}$$

Disequazioni fratte

*

Risolvere la seguente disequazione: $\frac{x^2 + 1}{2x - x^2 - 2} > 0$

$$N > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D > 0 \Rightarrow 2x - x^2 - 2 > 0 \Rightarrow \text{MAI VERIF.}$$

$$\begin{array}{c} + + + + + + + \\ - - - - - \\ \hline \ominus \end{array} \Rightarrow S = \{\emptyset\} \text{ (NON CI SONO SOLUZIONI)}$$

Disequazioni fratte



*

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ 2x - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Per risolverlo dobbiamo:

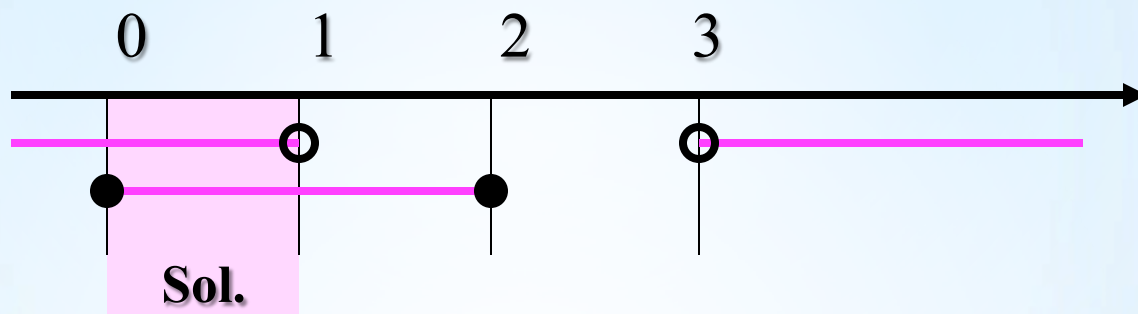
1. Risolvere ciascuna disequazione

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \quad \text{soluzione} \quad x < 1 \vee x > 3$$

$$2x - x^2 \geq 0 \quad \text{soluzione} \quad 0 \leq x \leq 2$$

Sistemi di disequazioni

2. Riportare le soluzioni trovate sul grafico indicandole con una linea **continua**



3. Prendere come soluzione del sistema, gli intervalli di soluzioni comuni **a tutte** le disequazioni:

$$0 \leq x < 1$$

Sistemi di disequazioni

*

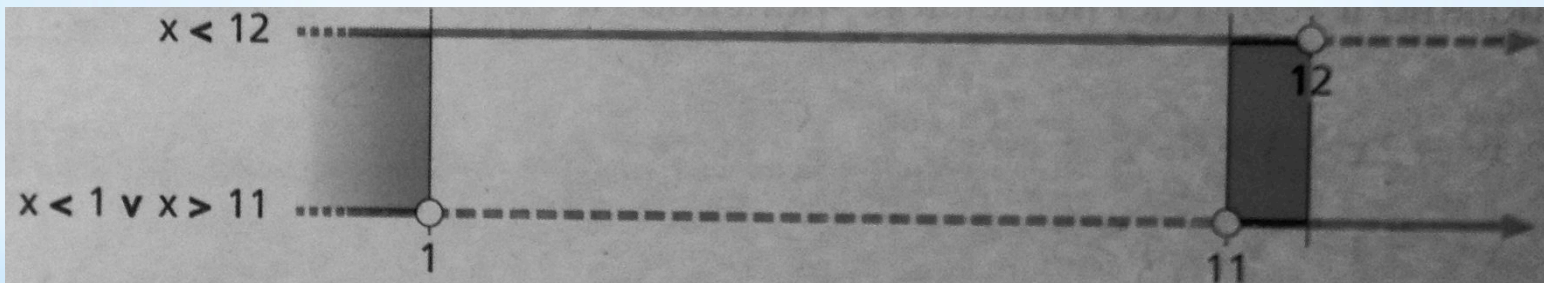
Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 24 < 0 \\ x^2 - 12x + 11 > 0 \end{cases}$$

Risolvi le singole disequazioni che formano il sistema:

$$\begin{cases} x < 12 \\ x < 1 \cup x > 11 \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente le singole soluzioni sulla retta orientata:



La soluzione del sistema è data dalla parte colorata:

$$x > 1 \cup 11 < x < 12 \quad \text{oppure} \\]-\infty; 1[\cup]11; 12[$$

Sistemi di disequazioni